**CAPITOLUL 10**

**REPARTIŢII CLASICE**

**10.1. Repartiţii discrete**

**10.1.1. Repartiţia binomială**

DEFINIŢIE: Variabila aleatoare *X* are o **repartiţie binomială** de parametrii *n* şi *p* dacă funcţia sa de probabilitate este dată de probabilitatea *p* (*x*) *n* din schema urnei lui Bernoulli, adică *x x n x f x Cn p q* − ( ) = , *x* ∈{0,Κ , *n*} , *p* ∈(0,1) , *p* + *q* = 1 . Deci :

*x*

*X* :

*x x n*−*x n C p q*

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate, deoarece: 1) *f* (*x*) ≥ 0 , evident deoarece > 0 *x Cn* , *p* ≥ 0 , *q* ≥ 0. − *n n n*

*n*

2) ( ) ( ) 1 1 *n f x C p q p q* .

*x x n x*

= = + = =

*x*

= = 0 0 *x*

**II.** Pentru calculul **mediei şi dispersiei** vom folosi funcţia generatoare de momente.

: = Κ

.

*e*

*tx*

( ) ( ) *tX g t* = *M e* ; *x n*

*tX* , 0,1, , ( )

*e*

*f x*

*n*

*n*

Deci

( ) ( ) ( ) ( ) . *tX tx g t M e e C p q C pe q pe q*

*x x n x*

*x t x n x t n*

− − = = = = +

*x*

*n*

*x*

*n*

= =

0 0

1 '( ) ( ) − = + *t t n g t npe pe q* ;

1 '(0) ( ) .

*m g np p q np n* = = + = −1

2 2 2 1 ' '( ) ( 1) ( ) ( ) − − = − + + + *t t n t t n g t n n p e pe q npe pe q* ; = = − + + + = − + = − − *m g n n p p q np p q n p np np* 2 *n* 2 *n* 1 2 2 2

2 ''(0) ( 1) ( ) ( )

= *n p* + *np* − *p* = *n p* + *npq* 2 2 2 2 (1 )

Deci: *M* (*X* ) = *np* şi *D X* = *m* − *m* = *n p* + *npq*− *n p* = *npq* 2 2 2 2 2 2 1 ( ) **.**

**Funcţia caracteristică:** *n*

*n n*

= = = ⋅ = ⋅ + − −

*x x n x*

*x it x n x it*

*itX itx c*(*t*) *M*(*e* ) *e C p q C* (*p e* ) *q* (*p e q*)

*n*

*n*

=

0 0

*x*

*x*

=

Evident, *m* = *M* (*X* ) = *c*'(0) = *np* 1 .

2 2 ' '(0) 1 . Prin urmare,

Analog se calculează *c m p npq i*

*m* = = + 2 2

2 1 ( ) .

*D X* = *m* −*m* = *npq* 2

**10.1.2. Repartiţia hipergeometrică**

DEFINIŢIE: Variabila aleatoare *X* are **repartiţie hipergeometrică** dacă funcţia sa de probabilitate este dată de probabilitatea *P* (*X* ) *n* din schema urnei cu bilă nerevenită (Această schemă presupunea că dintr-o urnă cu *N* bile, din care *a* erau albe şi *b* erau negre, se extrag *n* bile. *Pn* este probabilitatea ca din cele *n C C f x*−− ( ) = , *x*∈{0,Κ ,*n*}.

*x*

*n x*

bile extrase *x* să fie albe.). Deci *n*

*x*

−−

*a*

*C*

*N a N*

*X* :

*x*

*C C a*

*n x N a*

*C*

*n*

*N*

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate, deoarece:

1) *f*(*x*) ≥0, evident deoarece toate combinările sunt mai mari ca zero.

*x*

−

*n x*

*C C f x* . 2) 1 1 ( )

*n*

*n*

*n*

*x*

−

*n x*

− = ~~=~~ = *a C C*

*N a*

*n*

*C C*

*n a*

−

*N a*

0 0 0

*x*

= = *x*

*N*

*n*

*N*

*x*

=

*n*

Pentru a calcula suma

( ) am folosit egalitatea

−

*x CaC C*

pe

*x*

*f x* 0

0

*n x*

− = *N a*

*n*

*N*

=

=

*x*

care o vom demonstra în continuare.

*a b a b y y y* + (1 + ) (1 + ) = (1 + )

*a* + *y* = *C* + *C y* + + *C y* + *C y* + + *C y* − − (1 ) 1 ... ... 0 1 1 1

*n n*

*a a a*

*n n a*

*a a a*

*b* + *y* = *C* + *C y* + + *C y* + *C y* + + *C y* − − (1 ) 1 ... ... 0 1 1 1

*n n*

*b b b*

*n n b*

*b b b*

+ (1+ ) = 1+ + ... + + + ... + 0 1 1 1 *a b y C C y C y C y C y* + + − −

*n n*

*n n*

*a b a b*

+ + +

+ +

*a b a b a b*

*a b*

*a b*

Coeficientul lui *n y* din membrul stâng al ultimei relaţii este :

− − − + + + + =*n*

0 1 1 1 1 0 [ ... ] . *n y C C C C C C C C C C*

*n*

*a b*

*n*

*a b*

*n a*

*n*

*b a*

*x*

*b a*

*n x b*

*n*

*n*

*x*

=

0

*CaC* = *C*  *C C* = *C* Deci *nN*  .

*x*

−

*n x*

*n*

*x*

−

*n x*

+ −

*b*

*a b*

*a*

=

0 0

*N a*

=

*x*

*x*

**II. Media şi dispersia:**

*x*

*C C M X x n*

*n x* −

( )

− =

*x*

=

0

*a*

*C*

*N a n*

*N*

! − = − − −

*a xC x*

( 1)!

( 1)!

− ~~=~~ − = *xa*

*a a*

− ~~=~~ − −

*a*

*x*

1

*a aC*

*n*

!( )!

*x a x n*

*~~x~~*

( 1)!( )!

*x x a x n*

*~~a~~*

1 ( 1)!( )! *x a x*

− =  =  = *nN*

*x*

*n x* −

*x*

*n x* −

*x*

−

1

*n x* −

−

1

*a C C xC C a C C aC*

*N a*

−

*x*

=

*N a*

*a*

*a*

−

1

0 1

*N a* −

−

1

*x*

=

*x*

=

1

( 1)! !( )! ( )11 **,** *Na*

*n*

*aC M X n*

−

− − = ~~=~~

*N n N n*

*n*

*np Na*

*p*= **.**

*N* ~~= =~~ = − −

*~~a~~*

*C*

*N*

*~~a~~*

−

( 1)!( )! !

*n N n N*

*~~n~~*

*N*

Pentru a calcula dispersia, vom calcula momentul de ordinul doi. 2 2 1 ~~( 1)~~ 1 1 ( ) , unde

*n*

*n*

*n*

*M X* −− − = − ~~= − +~~

*x*

*n x*

*x*

*n x*

*~~x C C~~*

*~~x x C C~~*

−

*x*

*n x*

*n a*

*N a*

*n a*

*N a*

*xC C*

*C*

*C*

−

*n*

*C*

*a*

*N a*

0 0 0

=

= =

*N*

*x*

*N*

*x*

*N*

*x*

*x* = *x*(*x* −1) + *x* 2 .

! ( 1) ( 1)

− ~~= −~~ − − = − ( 2)! ~~( 1)~~ !( )!

*n*

*x*

*n*

*a*

*n*

*a*

*n*

*x*

−

2

*x x C x x*

*a a a C*

*x*

=

*~~a a~~*

*x a x*

*x*

*x*

( 1) ( 2)!( )!

= − − −

*a*

*x a x*

*x*

−

2

0

= == 2 22

*a a M X n a a ~~C C M X~~*

− ( ) ( 1) ~~( )~~ ( 1) ( ) 22 + = − ~~+ =~~ − = −−

*n*

2 *C M X*

*x*

−

2

*n x* −

*C*

*n a*

2

*N a* −

*C*

*n N*

*N*

*x*

=

0

*N*

− − − = *Nn*

*a a n N n N*

( 1) ~~( 1)~~ !( 2)!( )!

~~+~~ = −− ~~+ = −~~ − −

( 1) !( )!( 2)! *~~n~~*

*N n N n*

*a*

*N*

*~~a a~~*

*n n*

*N N*

( 1)

*~~a~~*

− − + ~~=~~ ⋅  ~~+~~ −

( 1)( 1)

− − = *N na* .

*a n*

~~1~~

*na*

*an a n N*

*N*

*N*

1

*N*

−

1

*na D X M X M X*

*an a n N*

2 2

*n a*

− − + = − = ~~⋅~~ 2

2 2

1 ( ) ( ) ( ) *N*

*N*

*N*

~~−~~ = −

2

− − + = *N N*

*na*

*an a n N*

*na*

*na*

*anN aN nN N nN na*

− − + − + ~~=~~ ⋅  ~~−~~ − *N*

*N*

*N*

*N*

1 ( 1)

−

− − = ~~⋅~~ *NN n*

*a*

( )( )

*N a N n*

− ~~⋅~~ − ~~= ⋅~~ −

*n*

*N a*

*n* .

*N*

*N N*

*~~a~~*

( 1) 1

*N*

*N*

−

*p q p Na* − = = 1− = 1− = .

*a*

*N a*

Dar *N*

*N*

Obţinem astfel 1 ( ) −− = *NN n D X npq* .

OBSERVAŢIE: Pentru *N* suficient de mare în raport cu *n* putem face aproximarea *Nn*

*N n* = − − ≈ −− 1

*N n*

*N*

≈ − *Nn D*(*X* ) *npq* 1 .

1. Atunci *N*

Deci dispersia variabilei aleatoare hipergeometrice diferă de dispersia variabilei aleatoare binomiale cu un factor subunitar ce tinde către 1 când *N* → ∞ .

**10.1.3. Repartiţia uniformă discretă**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are o **repartiţie uniformă discret**ă dacă funcţia sa de probabilitate este de forma *f x*1 ( ) = .

*n*

1 2

Κ Κ

*x n*

*n n n n*

*X* 1 1 1 1 : ~~Κ Κ~~

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate, deoarece: 1) *f*(*x*) ≥0, evident

*n*

2)

1 1 ( ) *f x n*

= =

*x n*

=

1

**II. Media şi dispersia**

+ ~~=~~ + =  ~~= =~~

*n n n*

1 1 1 ( 1) ( ) 1

*n*

*M X x x*

*n n*

*n*

*x*

*~~x~~*

*n*

2

2

= =

1 1

2 2 + + ~~=~~ + + =  ~~=~~ ~~= ⋅~~ *n n n n n*

1 1 1 ( 1)(2 1) ( )

( 1)(2 1)

*n*

*M X x x*

*n n*

*n*

*x*

*~~x~~*

2

*n*

6

6

= =

1

1

( 1)(2 1) ( ) ( ) ( )2

= + + − − ~~=~~ + ~~−~~ + + = − = 12

( 1)

( 1)(4 2 3 3)

2 2 *n n n n n n D X M X M X*

6

4

( 1)( 1) 2 − = + − = *n n n* 1

12

12

**10.1.4. Repartiţia Poisson**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiţie Poisson** *x*

−λ λ = ,

dacă funcţia sa de probabilitate este de forma ! ( )*x*

*f x e*

*x*∈*N*,λ >0.

*x*

−!

*X x*

:

*e*

λ λ *x*

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate deoarece: *x*

λ λ evident.

1) 0

!≥ −*x*

*e*

*x*, unde  ∞

*x*

*x*

λ λ λ λ λ λ *e e*

− ∞

~~=~~ = ⋅ = − ∞

2) 1

λ este dezvoltarea

*e*

−

*~~e~~*

! ! 0 0

=0 ! *x*

*x*

=

*x*

*x*

=

*x*

*x*

lui λ

*e* în serie McLaurin.

**II. Media şi dispersia** le putem determina prin calcul direct**:**

1

∞ −

*x*

*x*

*M X xe* λ λ ~~λ~~ λ λ λ .

∞

− − = − = ~~=~~ 0 0 ! ( 1)! ( ) *x*

*x*

=

*x*

*~~e~~*

=

*x*

*x x*

*x*

*M X x e* λ λ λ λ λ λ

∞

∞

∞

2 2 ( ) ( 2)! ~~( )~~ ! ~~( 1)~~ ! ( ) *x* − − − + = − = ~~= − ⋅ + =~~ 0 0 2

=

*x*

*~~x x e~~* =

*x*

*~~M X e~~*

=

*x*

*M X*

*x x*

2

*x*.

λ λ λ λ λ λ λ λ + = ⋅ + = + − = ⋅ − ∞=− 2 ( ) ( ) ( 2)!*M X e e M X*

− 2 2 *e*

*x*

2

*x*

= − = λ + λ − λ = λ 2 2 2 2 *D*(*X* ) *M* (*X* ) *M* (*X* ) .

**Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare Poisson:** *it x*

= ⋅ = =  λ λ λ λ

( ) ( ) ( ) . Prin urmare (1 ) ( ) *it e c t e*− − = λ .

*e*

*c t e f x e* − ⋅ ∞

− ∞

*it e*

*itx e e* 0 0 !

*x*

=

*x*

=

*x*

(1 ) (1 1) 0 *c*'(*t*) *e i e c*'(0) *e i e e it it*

= ⋅ ⋅ = ⋅ ⋅ − − − − λ λ λ λ 1 ~~'(0)~~ 1 ( ) *i e*

λ λ λ = = ~~=~~ ⋅ ⋅ = − ⋅0

*M X m*1

*~~c~~i*

*i*

*e it e it c t e i e e i e it it*

= ⋅ ⋅ + ⋅ ⋅ − (1− ) 2 − (1− ) 2 ' '( ) (λ ) λ λ λ

' '(0) ( ) (1 1) 2 2 0 (1 1) 2 2 0 2 2 λ λ λ λ λ λ = ⋅ ⋅ + ⋅ ⋅ = + − − − − *c e i e e i e i* 2 2 ' '(0) 1*c*

*m* .

= = λ + λ 2

*i*

2 1 *D*(*X* ) = *m* − *m* = λ + λ − λ .

Prin urmare: 2 2 2

**10.2. Repartiţii continue**

**10.2.1. Repartiţia continuă uniformă**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* , continuă, are **repartiţie uniformă** dacă funcţia sa de probabilitate este de forma *f x* − = 1 ( ) , *x* ∈(*a*,*b*) .

*b a*

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate deoarece:

1) *f* (*x*) ≥ 0 evident, deoarece *b* > *a* .

2) = −− ~~=~~ − ~~=~~ − = *bababa b a*

*f x dx* 1 1 1 ( )

*b a*

*~~dx~~*

*b a*

*b a ~~dx~~*

**II. Media şi dispersia:**

1 1 ( ) ( )2 2 2 *a b* + = −− ~~⋅ =~~ − ~~=~~ − = =

*b*

*x b a*

*b*

*M X xf x dx ba*

*a*

*b a*

*a*

*~~xdx~~*

*b a*

2( ) 2 ~~|~~ 2 *b a*

3 3 2 2

*b a M X x f x ba*+ + ~~=~~ −− = =

2 2 *a ab b* 3( ) 3 ( ) ( )

*b a*

2 2 2 2

2 2 *a ab b a ab b D X M X M X* = + + ~~−~~ + + = − = 42

3 ( ) ( ) ( )

4 4 4 3 6 3 2 2 2 2 2 *a ab b a ab b a* − *b* = + + − − − = **.** ( )

12

12

**10.2.2. Repartiţia exponenţială negativă**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are o **repartiţie exponenţială negativă** de parametru ∝ dacă funcţia sa de probabilitate este de forma *x f x e*− ⋅ = ⋅ ∝ ( ) ∝ , *x* ≥0, ∝ >0.

**I.** *f* (*x*) este o funcţie de probabilitate deoarece:

1) *f* (*x*) ≥ 0 evident.

2) ( ) | 0 1 1 0 0 0 = ⋅ = − = + = − ⋅ ∞ ∞ − ⋅ ∞

*x x f x dx e dx e* ∝ ∝ ∝

**II. Media şi dispersia:**

= = ⋅ = − + =  ∞ − ⋅ ∞ − ⋅ ∞ − ⋅ ∞

*M X xf x dx x e dx xe e dx x x x*

0 0 0 0 ( ) ( ) | ∝ ∝ ∝ ∝ ∝ 1 | 1 − 0 = − ⋅*x* ∞ *e* **.**

∝ ∝

În rezolvarea integralei am folosit metoda integrării prin părţi, unde *u*(*x*) = *x* , *du* = *dx* , *x v x e*− ⋅ = − ∝ ( ) , *dv e dx* − ⋅*x* = ⋅ ∝ ∝

2 2 2 ( ) | 2 0 *x x x x M X x e dx x e xe x e* ∝ ∝ ∝ ∝ ∝ = ⋅ = − + = + ⋅ =  ∞ − ⋅ ∞ − ⋅ ∞ − ⋅ ∞ − ⋅0 0 0

2

0

2 1 2

∝

∝

∝ ∝ ∝ = ~~⋅~~ = .

2

Integrala a fost calculată tot prin metoda integrării prin părţi, unde 2 *u*(*x*) = *x* , *du* = 2*xdx* , *x v x e*− ⋅ = − ∝ ( ) , *dv e dx* − ⋅*x* = ⋅ ∝ ∝ . 2 2 2 1 1 ( ) ( ) ( )∝ ∝ ∝

*D X* = *M X* − *M X* = ~~− =~~ .

2 2 2

σ1 (*X* ) = *D*(*X* ) = .

∝

Putem calcula media şi dispersia şi astfel:

∞ − ⋅ ∞

= = ⋅ ⋅ 0 0 *M* (*X* ) *xf* (*x*)*dx x e dx* ∝ *x* ∝

∝1 ⋅ = = ~~=~~ şi

Făcând schimbarea de variabilă *~~dx~~ dy y x y x*∝ ∝ observând că limitele de integrare se păstrează, obţinem: ∝1 (2) 1 1 1 ( ) 0 0 = ~~⋅ ⋅ = =~~ Γ =  ∞ − − ∞*~~e dy ye dy~~ y M X y y* ∝ ∝ ∝ ∝ ∝

La fel, = = = =  ∞ − ∞ − ⋅ ∞0 22

2 2 1 ( ) ( ) *~~e~~ dy y M X x f x dx x e dx x y* ∝ ∝ ∝

2

0

0

2 ~~(3)~~ 1 1 ∝ ∝ ∝ = ~~= Γ =~~ ∞ − *~~y e dy~~ y* . 2

∝ ∝

2

2 2 0

2 2 2 1 1 ( ) ( ) ( )∝ ∝ ∝

Prin urmare, 2 2 2 *D X* = *M X* − *M X* = ~~− =~~ .

σ1 *M*(*X*)= *X* = .

Repartiţia exponenţială are proprietatea ∝ Repartiţiile exponenţială şi Poisson sunt utilizate în modelarea şi rezlovarea problemelor legate de firele de aşteptare care apar în activitatea economică.

**10.2.3. Repartiţia normală**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are o **repartiţie normală** dacă funcţia sa de probabilitate este de forma

2

1 ( ) − −

1

*x m*

*f x e* , unde *m* ∈ *R* , σ > 0 (1)

= σ

2

σ π

2

Pentru a pune în evidenţă parametrii *m* şi σ , densitatea de probabilitate se mai notează *n*(*x*;*m*,σ ), *x* ∈ *R*, σ > 0 . **I.** *f* (*x*) este funcţie de probabilitate, deoarece:

1) *n*(*x*;*m*,σ ) ≥ 0 , evident, din definiţie.

1 2

1

*x m*

⋅ =  − ∞ −

2) ( ; , ) = 1  ∞−∞ *n x m* σ *dx* sau 1 σ π .

−∞ *e dx*

2

2

σ

1 .

*x m* = −σ , *dx* = *dy*  *dx* = σ ⋅ *dy*

Notăm *y*

σ

1

2

σ *e dx e dy e dy y y x m*,

− ∞ −

1

1

1 2 2

1

1

2

∞ − −

π

⋅ = ⋅ ⋅ = = =  ∞−∞

2

2

σ

2

1

−∞ π σ π σ π

2

−∞

2

2

π

1

2

2

=  ∞−∞−

*y*.

deoarece se ştie că integrala Euler-Poisson 2π *e dy*

2

**Graficul funcţiei de probabilitate** depinde de parametrii *m* şi σ , forma curbei rămânând (structural) aceeaşi, şi anume forma cunoscută sub numele de **clopotul lui Gauss**.

**EXEMPLU:** *n*(*x*;0,σ )

1 ≈ 0,4 =

- σ 2π

-1 0 1

1) Faţă de parametrul *m* , curbele *n*(*x*,*m*,σ ) reprezintă de fapt translaţii de-a lungul axei *ox*, menţinându-şi forma şi mărimea.

~~| |~~

3 *m* = − *m* = 0 23 *m* =

2

2) Faţă de parametrul σ , curbele sunt mai ascuţite sau mai plate, astfel încât aria cuprinsă între graficul curbei şi axa *ox* să fie egală cu 1 (unitatea de suprafaţă). Aici σ 1 < σ 2 < σ 3 .

σ 1

σ 2

σ 3

~~3~~ *m* =

2

OBSERVAŢIE: Curba se apropie repede de axa *ox* . În

raport cu o abatere *x* − *m* < 3σ , diferenţa faţă de *ox* este de ordinul a 0,003 unităţi. Astfel, repartiţia normală poate fi considerată definită într-un interval închis şi finit.

Pentru determinarea mediei şi dispersiei vom utiliza **funcţia caracteristică a variabilei aleatoare normale.**

∞−∞ *c t* = *M e* = *e n x m dx itX itx* ( ) ( ) ( ; ,σ ) (2) Calculăm pentru început funcţia caracteristică a variabilei 1

1 ( ;0,1) *y*

aleatoare normale normate: 2

*n y e*−

= π (3)

2

2

*y*

− 2

− 2

*Y*

1

*ity*

*itY*

*e*

1

.

: 1 *y*

*e*

: 1 *y*

2

π

*e*

*e*

2

2

2

π

2 2

− *c t e n y dy e e dy e dy y ity y ity ity* ( 2 ) 21 1 ( ) ( ;0,1)π π

1

∞ −

∞ − −

= = = =  ∞−∞ 2

−∞

1

2

1 ~~( 2 )~~ 21

−∞

1

2

1 ~~( )~~ 21

*e dy e dy ~~y ity i t~~ i t ~~y it~~ i t* 2 2 2 2 2 2 2 2

∞ − ~~− +~~

− ~~− + +~~

= = =  ∞−∞

2

2

2

2

π π

−∞

1

1

1 ( ) 21 2 2

−

*t*

2

−

*z t*

( ) 21 2

= = = *e dz*= *e*

1

2 2

*e dy e*

2

2

∞−∞−

− − −

− −

*y it t* 2

∞

*e e dy* 2

∞

*y it*

2 2 2 π π π

−

1

*t*

2

−∞

−∞

1 2

= = ππ , unde am folosit substituţia *y*−*it*= *z* *dy*=*dz*. 2 *t*

*e* −

2

*e*

2

2

Observăm, de asemenea, că utilizând această substituţie limitele de integrare nu se schimbă.

Ultima integrală este integrala Euler-Poisson. Ea este egală cu 2π şi se calculează astfel:

2 2

1

*z z*.

*dt*

= = = =  ∞ − ∞ ~~∞ −~~ ∞ −

−*t e dt e dz e dz eit t* 2 2 02

−∞

2 2

0 0

2 2π

2

*t*

În calculul de mai sus am folosit substituţia : 2

1; *tdt*

*dt*

*z* = *t*  *zdz* = *dt*  *dz* = 2

*t z t dz z*2 = = = .

2

*z*

2

2

Prin urmare, funcţia caracteristică a variabilei aleatoare 1

normale normate *n* ( *y* ;0,1) este 2

*Y c t e*−

( ) *t*

= (4)

2

Fie variabila aleatoare *X*=α⋅*Y*+β. Atunci *c* (*t*) *e c* ( *t*) *Y X* = ⋅ ⋅ α β (5)

*i t*

**Demonstraţie:**

= = = = ⋅ + ⋅ ( ) [ ] [ ] *itX it*(α *Y* β ) *it*α *Y it*β

*it*β *i t*α *Y it*β = .

*X c M e M e M e e* [ ] ( ) ( ) *e M e e c t Y*

1

*x m*

2

Fie variabila aleatoare normală

1 ( ; , ) − − *n x m e* .= σ

σ

2

σ π

2

*x m*= = ⋅ + = ⋅ + − σ σ

Facem substituţia *y x y m X Y m*

σ, unde

*Y* = *N*( *y*;0,1) . Aşa cum am văzut, pentru variabila aleatoare

1

normală normată, funcţia caracteristică este 2 *Y c t e*−

( ) *t*

= .

2

Deci conform (5) avem:

1

*imt e c t e e* ~~σ~~

2 2

*cX* (*t*) = *c*σ*Y* +*m* (*t*) =

*Y*

( ) *t imt* σ −

⋅ = . 2

În concluzie, funcţia caracteristică a variabilei normale 1

*n*(*x*;*m*,σ ) este 2 2

*X c t e* − ~~σ~~

( ) *imt t*

= (6)

2

**Calculul mediei:** 1 *M* (*X* ) = *m*

*m* '(0) 1 =

*c*

*i*

1

*X c t im t e* ~~σ~~

2 2

2 ' ( ) ( ) *itm t*

σ −

= − *c X* = *ime* = *im* 0 ' (0) *m*1 = *m* .

2

Deci *M* (*X* ) = *m* .

**Calculul dispersiei:** 2

2 2 *D*(*X* ) = *M* (*X* ) − *M* (*X* ) = *m* − *m*

2 1

*m* =

*c*

' '(0)

2 2

*i*

1

1

2 2 2 2

*c t e im t e* ~~σ~~ ~~σ~~ 2 ' '( ) ( ) *itm ~~t itm~~ t* σ σ − ~~−~~

2 2 2

= − + −

2

2 0 0 2 2 *c*' '(0) = −σ *e* + (*im*)*e* = −σ − *m* 2 2

σ (întrucât, evident, 1 2*i* = − )

*m* = + − − = ~~=~~ σ

*c*

' '(0) *m*

2 2 *i*

2 2

2

*i*

*m*

Deci 2 2 2 2 *D*(*X* ) = σ + *m* − *m* = σ .

OBSERVAŢIE: Parametrii *m* şi σ ai repartiţiei normale reprezintă media şi respectiv abaterea medie pătratică.

**Funcţia de repartiţie ; funcţia integrală a lui Laplace:**

Fie variabila aleatoare normală de parametrii *m* şi σ : *x*

σ

: >

*X* , *m* ∈ *R* , unde, aşa cum ştim,

*n x m* σ ( ; , )

, 0

2

1

1 ( ; , ) − − *x m*

*n x m e* . Funcţia de repartiţie este : = σ

σ

σ π 2

2

*t m x x*2 1

1 ( ) ( ) ( ; , ) − − σ (7)

−∞  −∞ = < = = σ

2

*F x P X x n t m dt e dt* σ π

2

Notăm:  −∞ = *x*

*N*(*x*;*m*,σ ) *n*(*t*;*m*,σ )*dt* funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare normale.

Fie *X* o variabilă aleatoare normală cu densitatea de probabilitate *n*(*x*;*m*,σ ) şi funcţia de repartiţie *N*(*x*;*m*,σ ). Dacă *X m Z* − = , ştim că *Z* este o

facem schimbarea de variabilăσ

variabilă aleatoare normală normată cu media *m* = 0 şi dispersia σ = 1. Deci *Z* are densitatea de probabilitate *n*(*z*;0,1) şi funcţia de repartiţie *N*(*z*;0,1) .

*t m x*2

1

1 ( ) ( ) ( ; , ) − −

σ (8)

−∞ = < = = σ

2

*F x P X x N x m e dt* σ π

2

Pentru calculul integralei (8) facem substituţia:

*y dt dy t m* = = ⋅ − σ

*y* − = , iar pentru *t x m*

σ.Dacă *t* = *x* , atunci σ

tinzând către − ∞ şi *y* tinde către − ∞ . Astfel, vom obţine: 1

*x m F x e dy N y N y y*.  − = ⋅ = = −

1 ( )2

−∞ ( ;0,1) ;0,1

σ

2

σ π

2

σ

Prin urmare, putem scrie:

*z* − = .

*x m*

*P*(*X* < *x*) = *N*(*x*;*m*,σ ) = *N*(*z*;0,1), unde σ

Reprezentarea grafică a funcţiei de repartiţie normală

1

*z* − = este:

*x m*

1 ( ;0,1)π, unde σ

2

normată de forma  −∞− = *z y*

*N z e dy*

2

2

*N*(*z*;0,1) 1

21

OBSERVAŢIE: Curba *N*(*z*;0,1) este simetrică faţă de punctul 21 0, . Dacă facem o translaţie de axe: 21 Φ(*z*) = *N*(*z*;0,1) − (translaţie datorată lui Laplace), obţinem:

Φ(*z*)

21

*~~z~~* 2 − 1

OBSERVAŢIE: Φ(*z*) este o funcţie simetrică faţă de origine, şi deci funcţia Φ este o funcţie impară . Prin urmare este suficient să cunoaştem Φ(*z*) pentru *z* > 0 .

*n*(*z*;0,1)

Φ = *z z n t dt* 0 ( ) ( ;0,1)

*z*

În toate cărţile şi manualele de teoria probabilităţilor şi statistică matematică, funcţia Φ(*z*) este tabelată.

Prin urmare, avem: ( ) 21 *N*(*z*;0,1) = + Φ *z* este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare normală normată şi σ*x m N x m*21 ( ; , ) este funcţia de repartiţie a variabilei

− = ~~+ Φ~~σ

aleatoare normală nenormată (de parametrii *m* şi σ ).

**Calculul momentelor centrate :**

Momentele centrate ale variabilei aleatoare normale sunt des utilizate, în special în statistica matematică. Astfel, momentul centrat de ordinul *r* :

2

1

1 ( ) ( ; , ) ( ) − ∞ −

∞

*x m*

−∞ = − = − σ

*r r*

2

∝ σ

*r*

*x m n x m dx x m e dx* σ π

2

−∞

Am văzut că:

0 = − = =  ∞−∞ ∝ *x m n x m* σ *dx* ∝ .

0

( ) ( ; , ) 1 1 0

*x m x m* 2 2 1

1

= − = −  ∞−∞ − ∞ −

− −

1 ( ) σ σ

∝

2

1

2

*x m e dx x e dx* 12

σ π σ π

−∞

2

1 2

= =  ∞−∞ − −∝

1

2

*x m*

σ *m e dx* σ π

2

0 0 1

Notăm : *y x m y dx dy x m* = − = ⋅ = ⋅ − σ σ

σşi întrucât

σ > 0 , limitele de integrare se păstrează. Obţinem:

2

1 *y r*

*m r x*

− −

= ⋅ = = − ∞−∞

1

1

*r y r*

1 2 2

σ

σ

∞ −

∞ −

| 2 2 2

*r r*

2

*r y e dy y e dy y e* +

∝ σ σ

σ

2

2

−∞

σ π

1

π

−∞

1

π

σ

*r* 2

2 2 2 ( 1) 21 ( 1)2− *y r r r y e dy* ∝ σ *r* ∝

+ − =  ∞−∞− − *r y e dy*

− − − − = −  *r r*

*y r*

∞

2 2 2

2 ( 1) 2π 2

σ σ −∞

π

În rezolvarea acestei integrale am aplicat metoda integrării

1

1

prin părţi, unde −1 = *r f y* 2 ' ( 1) −  = − *r f r y* , 2 2 *g ye g e* − ~~−~~

' *~~y~~ y*

= = − .

2

2

Deci:

2 2

2 ∝ = σ (2 −1) = σ

(3 1) 1 0 2 ∝3 = σ − ∝ =

4

2

4 ∝ = σ (4 −1)∝ = 1⋅ 3⋅σ

2

0 ∝5 =

……………………………….

0 ∝2*q*+1 =

*q*

*q q* 2

2 ∝ = Κ 1⋅ 3⋅ ⋅(2 −1)σ

**10.2.4. Repartiţia Gamma**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiţie Gamma** dacă funcţia sa de repartiţie este de forma:

1

*x*

> = Γ +−

*a*

*x e x*

*b*

, 0

*f x a b a b*

*a* , unde  ∞ − Γ + = 0 (*a* 1) *x e dx a x*

( ; , ) 1

( 1)

≤

0, 0 *x*

+

şi *a* > −1, *b* > 0 .

**I.** *f* (*x*) este funcţie de probabilitate, deoarece: 1) *f* (*x*;*a*,*b*) ≥ 0 , evident

*x*

*x*

1 ( ; , )

1

1

2) = Γ + = Γ + = ∞ ∞ −

∞

−

−∞  *~~x~~ e dx*

*a*

*a*

*a b f x a b dx b*

*x e dx*

*b*

*a* 0 0 1 1

( 1)

+

( 1)

*a b*

*a*

+

Notăm *y x b y dx b dy bx* = = ⋅ = ⋅

Γ + ~~=~~ Γ + ~~⋅ =~~ Γ + = ∞ − ∞ −

1

1 1

*a a y a y*

( 1) *a*

0 0 1 = Γ + 1

*a*

*~~b y e b dy~~*

*~~y e dy~~*

( 1)

+ *a*

*a b*

( 1) *a*

( 1)

Amintim câteva proprietaţi ale integralei Γ :

**P1.** Γ(*a*) = (*a* −1)Γ(*a* −1)

**P2.** Γ(*n*) = (*n* −1)!

**P3.**  ~~=~~ π  Γ21

Demonstraţiile acestor proprietăţi se găsesc în cursurile de analiză matematică.

**Funcţia generatoare de momente pentru variabila aleatoare Gamma:**

*x*

1 ( ) ( ) ( ; , ) 0 1 0 > − > Γ + = = = ∞ −

∞*x e dx a b*

*tX tx tx*

*a*

*a b g t M e e f x a b dx e b*

, 1 0

( 1)

*a*

+

Facem substituţia : *x b y dx b dy bx y* = = ⋅ = ⋅ .

Avem:

1 ( )

1

⋅ ⋅ = Γ + ~~⋅ =~~ Γ + = − ∞ ∞

+ *e y e dy a b g t e a a bty a y*

*bty*

*a*

*~~b y b dy~~*

0 0 1 ( 1)

1

( 1)

∞ − −

1

*a* 1

−

*y* 1

1

,

∞ −

− Γ + − ~~=~~ Γ + =  *a y bt a*

(1 )

*~~e y dy~~*

*a a* + +

*bt a*

*e y dy* 1

− =

1 1 0

1 0

( 1) *a*

(1 ) *bt*

1 ( 1)

(1 ) *bt*

+

1

*a*

−

*y* 1

1

*bt*

∞ −

deoarece 1

, fiind densitatea de

1

*bt a*

*a*

1 ( 1)

0

− Γ +

+ =

*e y dy*

1

*a*

1

*bt*

probabilitate a repartiţiei Γ.

Prin urmare, putem scrie că funcţia generatoare de momente pentru Γ este ( 1) ( ) (1 )− + = − *a g t bt* .

**Momentele iniţiale:**

Calculăm momentele iniţiale din relaţia ( ) | , 1,2,.... 0

( ) *g t t*= = *mr r* = *r*

( 2) ( 2) = − + − − = + − = = + − + − + *g t a bt b b a bt m g b a a a* '( ) ( 1)(1 ) ( ) ( 1)(1 ) '(0) ( 1) 1 2 ( 3) = + + − = = + + − + *g t b a a bt m g b a a a*

' '( ) ( 1)( 2)(1 ) ' '(0) ( 1)( 2) 2

2

……………………………………………………………………….

*r r a r g t b a a* Κ *a r bt m g*

= + + ⋅ ⋅ + − = = − + + ( ) ( 1)( 2) ( )(1 ) (0) ( ) ( 1) (*r*) *r*

*b* (*a* 1)(*a* 2) (*a r*) *r* = Κ + + ⋅ ⋅ +

Deci ( ) ( 1) *M X* = *m*1 = *b a* + şi

( ) ( 1)( 2) ( 1) ( 1) 2 2 2 2 2 *D X* = *m*2 −*m*1 = *b a* + *a* + −*b a* + = *b a* +

**Momentele centrate:**

= − = − =  − =− *kjj j k j*

*k k j*

∝ [ ( )] [ ] ( 1)

*k M X M X M X m M C m X*

=

*k*

0

*k*

− = −

*jC m M X*

*j j k j*

( 1) ( )

*k*

*j*

=

0

*k*

Deci :

∝ ( 1) .

*j*

*j j*

*k C m m* = − −

*j*

=

0

*k*

*k j*

OBSERVAŢIE:

Pentru *k* = 2 obţinem:

2

*j j* = = − + = − =

∝ − , unde :

0 0

1 1

2 2

( ) 2

2 *C*2*m m*2 *C m m C mm C m m m m D X*

*j*

*j*

=

0

2

2 2

`1 2

0 2 `1

( ) (1) 1 0 *m*0 = *M X* = *M* = şi *m* = *M* (*X* ) = *M* (*X* ) = *m* 1

1 .

Pentru *k* = 1 obţinem:

( ) ( ) ( ) 0 ∝1 = *M X* − *m* = *M X* − *M m* = *m* − *m* =

În cazul repartiţiei Γ, vom obţine:

0 ∝1 = ;

( ) ( 1) 2 ∝2 = *D X* = *b a* + ;

3

=  − = − ⋅ + − =

*j j j* ∝

2

3

3 ( 1) *C*3 *m m*3 *m* 3*m m* 3*m m m m* − 0

*j*

=

*j*

0

3 2

1

( 1)( 2)( 3) 3 = *b a* + *a* + *a* + − + + + + + + − + = 2 2 2 3 3 3*b*(*a* 1)*b* (*a* 1)(*a* 2) 3*b* (*a* 1) *b*(*a* 1) *b* (*a* 1) = ( + 1)[( + 2)( + 3) − 3( + 1)( + 2) + 3( + 1) − ( + 1) ] = 3 2 2 *b a a a a a a a* = ( +1)[( +5 +6−3 −9 −6+2 +4 +2]= 3 2 2 2 *b a a a a a a a* ( 1)2 2 ( 1) 3

3 *b a*+ ∝ = *b a*+

3

3 ( 1)( 3) 4 ∝4 = *b a* + *a* + .

**10.2.5. Repartiţia Beta**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiţie Beta** dacă densitatea sa de probabilitate este de forma:

1

− ∈ =− −

*a b*

1 1

(1 ) , [0,1] ( , )

*x x x*

β , unde *a* > 0, *b*>0 şi *f x a b a b*

( ; , )

0, ( ,0) (1, )

*x*

∈ −∞ ∪ ∞

*a b x x dx a*− *b*− = − 101 1 β( , ) (1 )

**I.** *f* (*x*) este funcţie de probabilitate, deoarece:

1) *f* (*x*;*a*,*b*) ≥ 0 , evident oricare ar fi *x* ∈[*a*, *b*]

1 ( ; , ) 101 1 10 = ~~− =~~ = − − *a b* 1 ~~(1 )~~ ( , )

2) ( , ) 1 *a b f x a b dx a b* β β β

*~~x x dx~~*

( , ) *a b*

Reamintim câteva proprietăţi ale integralei β(*a*,*b*):

**P1.** β(*a*, *b*) = β(*b*, *a*)

**Demonstraţie:** facem substituţia 1− *x* = *y*  *x* = 1− *y*  *dx* = −*dy* . = − = − − = − = − − − − − − 101 1 011 1 101 1 (*a*,*b*) *x* (1 *x*) *dx* (1 *y*) *y dy y* (1 *y*) *dy* (*b*,*a*) *a b a b b a* β β

**P2.** ( 1, 1) 11 ( , ) − − + −

*a* β *a b* β

− = *a b*

*a b*

*a* β *a b* β

1 ( , ) − − + −

− = *a b*

− ~~⋅~~ + −

*b*

1

**P3.** ( 1, 1) 2

*a b*

1

*a b*

Γ Γ β = , unde  ∞ − − Γ = 01 (*a*) *x e dx a x*

( ) ( ) ( , )*a b*

*a b*

**P4.** ( )

*a b*Γ +

**II. Calculul momentelor pentru calculul mediei şi dispersiei:** 1 ( ; , ) *x x dx* 1 ~~(1 )~~ ( , )

= = ~~− =~~ − =  − − + − − 101 1 101 1 10 (1 ) ( , )

*m x f x a b dx x r r a b a r b*

*~~x x dx~~*

*r* β β

*a b*

Γ + Γ ~~=~~ + = β

*a b*

( , ) *a r b*

Γ + ~~⋅~~ Γ + + ( ) ( )

*a r b*

Γ + Γ + = Γ Γ ( )

β

( , )

*a b*

( ) *a r b*

*a b*

( ) ( ) *a b*

( ) ( )

*a r a b* Γ + + Γ

( ) ( ) *a r b a*

Dar Γ(*a* + 1) = *a*Γ(*a* ) Γ(*a* + *r*) = (*a* + *r* − 1)Γ(*a* + *r* − 1) = = Κ (*a* + *r* −1)(*a* + *r* − 2)Γ(*a* + *r* − 2) =Κ = (*a* + *r* −1)(*a* + *r* − 2)⋅ ⋅ *a*Γ(*a*) Γ(*a*+*r*+*b*)=Γ(*a*+*b*+*r*) =(*a*+*b*+*r*−1)Γ(*a*+*b*+*r*−1)=(*a*+*b*+*r*−1)(*a*+*b*+*r*−2)⋅ ⋅ Κ Γ(*a* + *b* + *r* − 2) = Κ = (*a* + *b* + *r* −1)(*a* + *b* + *r* − 2)⋅ ⋅(*a* + *b*)Γ(*a* + *b*) Deci

+ − + − ⋅ ⋅ Γ Γ + = *a b a b a b r* + ⋅ ⋅ + − = + + − + + − ⋅ ⋅ + Γ + Γ ( 1)( 2) ( ) ( )

Κ

*a r a r a a a b*

( 1) ( 1) Κ

*a a a r*

*mr* Κ ( 1)( 2) ( ) ( ) ( )

Κ

*a b r a b r a b a b a*

( )( 1) ( 1) + + + ⋅ ⋅ + + −

*a*

Prin urmare, ( ) 1 *M X*

+ =

*a a*

( 1) 2

*m* = + = , ( ) ( )( 1) *m* = + + +

*a b*

Deci dispersia este :

2 *M X a b a b*

2

2 2

( 1) ( ) 2

( )( ) ( 1)

+ = − = ( ) ( 1) + + − + + ~~=~~ + ~~−~~ + + +

*a a D X m m*

*a*

2

*a b a a a a b* = + + +

2 1 *a b a b*

2

( )( 1) ( )

*a b a b*

*a b*

3 2 2 3 2 2

*a a a b ab a a b a* .

*ab*

+ + + − − − = *a b a b*

+ + + ~~=~~ + + +

( ) ( 1) ( ) ( 1) 2 2 *a b a b*

**10.2.6. Repartiţia** 2 χ

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiţie** 2 χ dacă funcţia sa de repartiţie este de forma:

*k x*

1

2 ~~1~~ 2

~~− −~~

*x e x*

, 0

>

*k f x k*

*k*, unde \* *k* ∈ *N* reprezintă

( ; )

= Γ

2

2

2

0, 0

*x*

≤

numărul gradelor de libertate.

Mai jos prezentăm graficele funcţiei *f* (*x*;*k*) pentru *k* = 2,4,6,15 .

k=2

k=4

0,2-

0,15- k=6

0,1- k=15

0,05-

~~| | | | |~~ 0 5 10 15 20 25

Se vede că graficele sunt asimetrice, dar, pentru valori mari ale gradelor de libertate (*k* > 30), graficul repartiţiei 2 χ se apropie de graficul repartiţiei normale.

2 = − *k*

OBSERVAŢIE: 2 χ se poate obţine din Γ pentru 1 *a*

şi *b* = 2 .

Funcţia generatoare de momente a variabilei aleatoare Γ 1 (1 ) (1 )1 ( ) − +

este de forma ( 1)

*bt g t* şi (0) , 1,2,.... ( ) *g* = *mr r* = *r* . + = − − = *a*

*a bt*

2 = − *k*

Prin urmare, pentru 1

*a* şi *b* = 2 , vom obţine funcţia

generatoare de momente a variabilei 2 χ de forma:

*k*

*g t t*−

= − . 2 ( ) (1 2 )

*k k*

*t k t g m k k* 1 2 ~~1~~ 2 (1 2 ) ( 2) (1 2 ) '(0) 2 '( )

*g t*

= − − − = − = = − ~~− −~~ −1

− − = + −  + = − − ~~− −~~ −1 2 ~~1~~ 2 (1 2 ) ( 2) ( 2)(1 2 ) 22 ' '( )*k k*

*g t k*

*k*

*t k k t*

' '(0) ( 2) *g* = *m*2 = *k k* +

*D*( ) *m m k* 2*k k* 2*k* 2 2 2

2 χ = − = + − =

2 1

**10.2.7. Repartiţia Student**

DEFINIŢIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiţie Student** dacă funcţia sa de repartiţie este de forma:

+ Γ

*k*

2

1

~~+~~

*t*

1

2

+ − *k*

( , ) 2

=

∈ℜ

*f t k*

*k k*

~~1~~ ,

*t*

π

⋅ Γ 2

*k*

Se poate arăta că variabila aleatoare „t” este dată de raportul *z k*

*t* = , unde *z* este variabila aleatoare *n*(*x*;0,1) , iar variabila *V*

aleatoare *V* este un 2 χ cu *k* grade de libertate, independentă de *z*.

Se arată că lim *f* (*t*, *k*) *n*(*t*;0,1) *k* = →∞, deci *t* este aproximată suficient de bine de *n*(*x*;0,1) pentru *k* > 30 .

*M* (*t*) = 0 , iar 2 ( ) − = *kk D t* .

*n*(*x*;0,1) t

*x*